

K_p -积分模意义下广义 Mamdani 模糊系统的逼近性能及其实现

陶玉杰¹, 王宏志¹, 王贵君²

(1. 通化师范学院数学学院, 吉林通化 134002; 2. 天津师范大学数学科学学院, 天津 300387)

摘 要: 利用积分模(度量)研究模糊系统对可积函数类的逼近性是人们普遍关注的方法, 而基于 K -拟算术运算诱导的 K_p -积分模不仅是一维积分模的推广, 而且是刻画 p -次可积函数类的重要工具. 本文通过引入拟减运算重新定义 K_p -积分模, 且在 K_p -积分模意义下讨论分片线性函数对一类 $\hat{\mu}_p$ -可积函数的逼近性, 进而构造性地证明广义 Mamdani 模糊系统对 $\hat{\mu}_p$ -可积函数类仍有逼近性. 最后通过实例分析说明广义 Mamdani 模糊系统的逼近效果. 结果表明广义 Mamdani 模糊系统可以按任意精度逼近一类 $\hat{\mu}_p$ -可积函数.

关键词: K -拟算术运算; $\hat{\mu}_p$ -可积函数; K_p -积分模; 分片线性函数; 广义 Mamdani 模糊系统; 逼近性

中图分类号: TP183; O159 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2015)11-2284-08

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.3969/j.issn.0372-2112.2015.11.022

Approximation Ability and Its Realization of the Generalized Mamdani Fuzzy System in the Sense of K_p -Integral Norm

TAO Yu-jie¹, WANG Hong-zhi¹, WANG Gui-jun²

(1. College of Mathematics, Tonghua Normal University, Tonghua, Jilin 134002, China;

2. College of Mathematics Sciences, Tianjin Normal University, Tianjin 300387, China)

Abstract: Researching on the approximation of fuzzy system to integrable function class by means of the integral norm (a metric) is one method of common concern to the people. The K_p -integral norm induced by the K -quasi-arithmetic operations is not only a generalization for a one dimensional integral norm, but also an important tool to describe the p -integrable function classes. In this paper, the K_p -integral norm is redefined by introducing the quasi-subtraction operator. In the sense of the K_p -integral norm, the approximation of the piecewise linear functions to a kind of $\hat{\mu}_p$ -integrable functions is discussed. Then, we prove constructively that the generalized Mamdani fuzzy system has the approximation to a class of $\hat{\mu}_p$ -integrable functions. Finally, by a practical example the approximation effect of the generalized Mamdani fuzzy systems is illustrated. The results show that the generalized Mamdani fuzzy system can approximate a kind of $\hat{\mu}_p$ -integrable functions to arbitrary accuracy.

Key words: K -quasi-arithmetic operation; $\hat{\mu}_p$ -integrable function; K_p -integral norm; piecewise linear function; generalized Mamdani fuzzy systems; approximation

1 引言

模糊系统是一种基于知识或规则并可同时处理数据信息和语言信息的系统, 其中语言信息是通过一组 IF...THEN 模糊规则来完成, 而数据信息是对系统内部参数进行合理调节的外部条件, 其核心思想是绕开精确数学模型通过仿效人脑来利用模糊信息实施模糊推理. 80 年代末, 模糊系统在模式识别、系统建模、系统辨识和信号处理等领域的成功应用倍受关注^[1~3]. 这期间以

王立新教授为代表的研究工作颇为突出^[4~6]. 2000 年, 刘普寅^[7]通过剖分系统输入空间以所得分片线性函数为桥梁证明了 T-S 模糊系统对 p -可积函数类是通用逼近器, 并为实现逼近精度研究了系统内部所需模糊规则总数, 进而文献^[8]在 L_p -积分模意义下讨论了广义 Mamdani 模糊系统对 p -可积函数类的泛逼近性, 从而将两类模糊系统的逼近对象由连续函数类扩展到可积函数类上. 此后, 人们针对两种常见 T-S 模糊系统和 Mamdani 模糊系统分别研究了构成逼近器的充分和必要条

件^[9-12],文献[13,14]基于模糊变换和参数单点模糊化方法分别讨论了模糊推理建模和模糊系统的逼近性能,获得诸多有益结果.

2010年,李洪兴教授^[15]率先引入模糊系统范数并对其进行分类,继而文献[16]探究了自适应 Fuzzy 系统的逼近性和光滑性.这些工作对模糊控制及应用起到了较好的推动作用.2011年,文献[17]首次通过诱导算子引入 K -积分模定义,并以此为度量研究了一类折线模糊神经网络的逼近性,进而文献[18]将 Mamdani 和 T-S 模糊系统混合建立了广义混合模糊系统,并讨论了该系统逼近性和分层后规则数的降低问题.2014年,文献[19]率先依拟减算子 \ominus 引入 K -积分模,证明了广义 Mamdani 模糊系统在该积分模意义下对一类可积函数具有逼近性.这些结果不仅有效地应用于模糊控制与系统建模,而且为拓广模糊系统的逼近性奠定了基础.

然而,自文献[17]引入 K -积分模以来几乎所有工作都基于一维 K -积分模($p=1$)展开讨论,这无疑限制了 p -次可积函数的研究范围.本文将基于文献[19]再次引入拟减运算 \ominus 并重新定义 K_p -积分模($p \geq 1$),进而通过分片线性函数对一类 $\hat{\mu}_p$ -可积函数的逼近性证明了广义 Mamdani 模糊系统按 K_p -积分模对 $\hat{\mu}_p$ -可积函数类仍具有逼近性能,其中分片线性函数(PLF)在证明过程中起到关键的桥梁作用^[20].

2 K -拟算术运算和 K_p -积分模

1987年,Sugeno^[21]首次引入拟加和拟乘运算,进而建立了拟可加测度及其积分理论框架.2010年,文献[22]通过引入诱导算子建立了 K -拟可加模糊积分模型,并讨论了该模糊积分的伪自连续性及其结构特征,这些结果对进一步探究模糊系统的逼近性起到了关键作用.为此,本节先给出一些预备知识.

定义 1^[17] 设凹函数 $K: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ 严格递增,并在 $(0, +\infty)$ 上可导,且满足 $K(0)=0, K(1)=1$, 则称 K 为 \mathbb{R}^+ 上一个诱导算子.

定义 2^[19] 设 K 是 \mathbb{R}^+ 上诱导算子, $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$, 界定实数 a 与 b 的 K -拟加 \oplus 、 K -拟乘 \otimes 和 K -拟减 \ominus 的运算如下:

$$\begin{aligned} a \oplus b &= K^{-1}(K(a) + K(b)); \\ a \otimes b &= K^{-1}(K(a)K(b)); \\ a \ominus b &= \begin{cases} K^{-1}(K(a) - K(b)), & a \geq b \\ -K^{-1}(K(b) - K(a)), & a < b \end{cases} \end{aligned}$$

这里 K -拟减算子 \ominus 并不是 K -拟加 \oplus 的逆运算,且可等价地表示成 $K(|a \ominus b|) = |K(a) - K(b)|$.

命题 1^[19] 给定诱导算子 $K, \forall a, b, c \in \mathbb{R}^+$, 则有
(1) $|K(a) - K(b)| \leq K(|a - b|)$;

(2) 若 $a \geq b$, 则 $K(a \ominus b) = K(a) - K(b)$, 且 $K^{-1}(a - b) = K^{-1}(a) \ominus K^{-1}(b)$.

注 1 $\forall a \in \mathbb{R}^+, \forall p \in \mathbb{N}$, 反复利用定义 2 中拟乘 \otimes 运算, 若记 $a^p = \underbrace{a \otimes a \otimes \dots \otimes a}_p$, 则依归纳法不难证明

$a^p = K^{-1}[(K(a))^p]$, 且等价于 $K(a^p) = (K(a))^p$. 同理, 也可获得 $K^{-1}(a^p) = (K^{-1}(a))^p$. 此时, 约定

$$a^p = b \Leftrightarrow a = b^{1/p}.$$

以下, 我们将 K -拟加 \oplus 、 K -拟乘 \otimes 、 K -拟减 \ominus 和 K -拟幂运算(含逆)统称 K -拟算术运算, 该运算为后文引入 K_p -积分模起到重要作用.

定义 3^[17] 设 $(X, \mathfrak{R}, \hat{\mu})$ 是 K -拟可加测度空间, K 为给定诱导算子, f 为非负可测函数, $A \in \mathfrak{R}$, 若 $T = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ 为 A 任一有限可测分划, 若令

$$\int_A^{(K)} f d\hat{\mu} = \sup_T S_K(f, T, A),$$

其中 $S_K(f, T, A) = \bigoplus_{i=1}^n \left(\inf_{x \in A_i \cap A} f(x) \otimes \hat{\mu}(A_i \cap A) \right)$,

则称 $\int_A^{(K)} f d\hat{\mu}$ 为 f 在 A 上关于 $\hat{\mu}$ 的 K -拟可加积分.

此外, $\forall p \in \mathbb{N}$, 若 $\int_A^{(K)} f^p d\hat{\mu} < +\infty$, 则称 f 是 $\hat{\mu}_p$ -可积的.

记 $L_+^p(\hat{\mu}) = \{f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^+ \mid \int_A^{(K)} f^p d\hat{\mu} < +\infty\}$, 并称 $L_+^p(\hat{\mu})$ 为 $\hat{\mu}_p$ -可积函数空间.

引理 1^[17] (积分转换定理) 设 $(X, \mathfrak{R}, \hat{\mu})$ 为 K -拟可加测度空间, K 为给定诱导算子, f 为非负可测函数, 令 $\mu(A) = K(\hat{\mu}(A)), \forall A \in \mathfrak{R}$, 则 μ 是 Lebesgue 测度, 且 $\int_A^{(K)} f d\hat{\mu} = K^{-1}\left(\int_A K^p f d\mu\right)$.

显然, K -拟可加积分是 Lebesgue 积分的推广, 并可转化为 Lebesgue 积分, 亦即, $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A$, 由引理 1 和注 1 可得

$$\begin{aligned} \int_A^{(K)} f^p d\hat{\mu} &= K^{-1}\left(\int_A K[(f(x))^p] d\mu\right) \\ &= K^{-1}\left(\int_A [K(f(x))]^p d\mu\right). \end{aligned}$$

定义 4 设 $(X, \mathfrak{R}, \hat{\mu})$ 是 K -拟可加测度空间, $\forall p \in \mathbb{N}$, 若 $\forall f_1, f_2 \in L_+(\hat{\mu}), \forall A \in \mathfrak{R}$, 界定

$$H_p(f_1, f_2) = \left(\int_A^{(K)} |f_1(x) \ominus f_2(x)|^p d\hat{\mu}\right)^{\frac{1}{p}},$$

则称 H_p 为 $L_+(\hat{\mu})$ 在 A 上的 K_p -积分模.

根据积分转换定理、定义 2 和注 1, 容易获得

$$\begin{aligned} H_p(f_1, f_2) &= \left(K^{-1}\left(\int_A K(|f_1(x) \ominus f_2(x)|^p) d\mu\right)\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(K^{-1}\left(\int_A |K(f_1(x)) - K(f_2(x))|^p d\mu\right)\right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

或上式可等价地写成

$$K(H_p^\mu(f_1, f_2)) = \int_A |K(f_1(x)) - K(f_2(x))|^p d\mu. \tag{1}$$

定理 1 设 $(X, \mathfrak{A}, \hat{\mu})$ 是 K -拟可加测度空间, K 为诱导算子, 若 $\forall p \in \mathbf{N}, f_1, f_2, f_3 \in L_+^p(\hat{\mu})$, 则有 $H_p(f_1, f_3) \leq H_p(f_1, f_2) \oplus H_p(f_2, f_3)$, 且 $(L_+(\hat{\mu}), H_p)$ 关于拟加算子 \oplus 构成度量空间.

证明略. 该定理证明我们将有另文所述.

此外, 若约定 a. e. 相等 = 相等, 则由定义 1, 2 及 4, 容易验证 K_p -积分模 H_p 满足度量公理中的非负性和对称性. 因此, $(L_+(\hat{\mu}), H_p)$ 关于拟加算子 \oplus 构成一个度量空间.

3 PLF 及其逼近性

本节我们首先引入分片线性函数(Piecewise Linear Function, PLF)定义. 该 PLF 不仅可依 K_p -积分模为度量逼近一类 $\hat{\mu}_p$ -可积函数, 而且它在研究模糊系统的逼近问题中起到重要的桥梁作用.

定义 5^[7] 设 d 元连续函数 $S: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, 若 S 满足如下条件(1)-(2):

(1) 若 $\exists a > 0$ 使 S 在正方体 Δ 之外恒为零, 其中 $\Delta = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid -a \leq x_i \leq a, i = 1, 2, \dots, d\}$;

(2) 若存在 $N_s \in \mathbf{N}$ 及 d 维多面体 $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{N_s}: \cup_{j=1}^{N_s} \Delta_j = \Delta$, 且 S 在每个 $\Delta_j (j = 1, \dots, N_s)$ 上是线性函数, 亦即, $S(x) = \sum_{i=1}^d \lambda_{ij} \cdot x_i + \gamma_j, j = 1, 2, \dots, N_s, \forall x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \Delta_j$, 其中 λ_{ij}, γ_j 均是常数. 则称 S 为 \mathbb{R}^d 上一个分片线性函数, 简记为 PLF.

记 D_d 表示 \mathbb{R}^d 上所有 PLF 构成的集合, $V(\Delta_j)$ 是每个多面体 Δ_j 的顶点集合. $\forall S \in D_d, V(S)$ 表示所有多面体 $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{N_s}$ 的顶点全体构成的集合. 此外, 由于 PLF 仅连续, 无法保证其偏导数存在, 但依定义知 S 左(右)偏导数均存在, 故引入记号 $D_i(S)$ 为

$$D_i(S) = \bigvee_{x \in V(S)} \left| \frac{\partial S_+(x)}{\partial x_i} \right| \vee \left| \frac{\partial S_-(x)}{\partial x_i} \right|, i = 1, 2, \dots, d.$$

若令 $d = 2$, 对给定函数 $f(x_1, x_2)$ 设 \mathbb{R}^3 上某个小多面体 Δ_j 的三个顶点坐标分别为 $(x_1^1, x_2^1, f(x_1^1, x_2^1)), (x_1^2, x_2^2, f(x_1^2, x_2^2)), (x_1^3, x_2^3, f(x_1^3, x_2^3))$. 则基于文献[20]构造 PLF 解析式为

$$S(x_1, x_2) = \begin{cases} -\frac{D_{j1}}{D_{j3}}x_1 + \frac{D_{j2}}{D_{j3}}x_2 + \frac{D_{j4}}{D_{j3}}, & \forall (x_1, x_2) \in \Delta_j \\ 0, & \forall (x_1, x_2) \in \Delta^c. \end{cases}$$

其中 $j = 1, 2, \dots, 8m^2$. 这里系数行列式满足

$$D_{j1} = \begin{vmatrix} x_1^1 & f(x_1^1, x_2^1) & 1 \\ x_2^1 & f(x_1^1, x_2^1) & 1 \\ x_2^3 & f(x_1^3, x_2^3) & 1 \end{vmatrix}, D_{j2} = \begin{vmatrix} x_1^1 & f(x_1^1, x_2^1) & 1 \\ x_1^2 & f(x_1^2, x_2^2) & 1 \\ x_1^3 & f(x_1^3, x_2^3) & 1 \end{vmatrix},$$

$$D_{j3} = \begin{vmatrix} x_1^1 & x_2^1 & 1 \\ x_1^2 & x_2^2 & 1 \\ x_1^3 & x_2^3 & 1 \end{vmatrix}, D_{j4} = \begin{vmatrix} x_1^1 & x_2^1 & f(x_1^1, x_2^1) \\ x_1^2 & x_2^2 & f(x_1^2, x_2^2) \\ x_1^3 & x_2^3 & f(x_1^3, x_2^3) \end{vmatrix}.$$

定理 2 设 $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{A}, \hat{\mu})$ 是 K -拟可加测度空间, K 为给定一个诱导算子, $\forall p \in \mathbf{N}, \forall f \in L_+(\hat{\mu})$, 则 $\forall \epsilon > 0$, 必存在 PLF $S \in D_d$, 使得 $H_p(f, S) < \epsilon$.

证明略! 该定理证明将有另文所述.

4 Mamdani 模糊系统的逼近性

Mamdani 系统和 T-S 系统是最常见的两类模糊系统模型, 而对于非连续环境下研究这两类模糊系统的逼近性能具有重要理论意义. 本节针对文献[8]给出的广义 Mamdani 模糊系统模型, 以分片线性函数为桥梁证明该系统按 K_p -积分模为度量对一类 $\hat{\mu}_p$ -可积函数具有逼近性, 换言之, 广义 Mamdani 模糊系统可按任意精度近似表示成 $\hat{\mu}_p$ -可积函数.

定义 6^[19] 设输入论域为 $X_i = [-a, a], i = 1, 2, \dots, d, a > 0$, 对给定 $m \in \mathbf{N}$, 在每个论域 X_i 上做等距剖分: $-a = a_{i(-m)} < a_{i(-m+1)} < \dots < a_{i(-1)} < 0 < a_{i1} < \dots < a_{i(m-1)} < a_{im} = a$, 其分点为 $a_{ij} = j/m, i = 1, 2, \dots, d; j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm m$, 若在论域 X_i 上以每个分点 a_{ij} 为峰点(隶属函数为 1 的点)构造一组模糊数 $\tilde{A}_{ij} \in F(\mathbb{R})$, 则称模糊数组 $\{\tilde{A}_{ij} \mid j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm m\}$ 为论域 X_i 上一个等距模糊剖分. 令

$$G(m) = \{(p_1, p_2, \dots, p_d) \in \mathbb{Z}^d \mid -m \leq p_i \leq m, i = 1, 2, \dots, d\}$$

若对 $X_i = [-a, a]$ 上某个等距模糊剖分 $\{\tilde{A}_{ij}\}$, 及 $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in [-a, a]^d, \forall (p_1, p_2, \dots, p_d) \in G(m)$, 我们约记 $G(m, x) = \{(p_1, p_2, \dots, p_d) \in G(m) \mid N_{(p_1, p_2, \dots, p_d)}(x) > 0\}$, 其中 $N_{(p_1, p_2, \dots, p_d)}(x) = \tilde{A}_{1p_1}(x_1) \cdot \tilde{A}_{2p_2}(x_2) \cdots \tilde{A}_{dp_d}(x_d)$.

事实上, Mamdani 模糊系统的规则库是由前件模糊集(数) $\{\tilde{A}_{ij} \mid j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm m\}$ 所有组合的模糊规则, 所有可能的规则总数为 $(2m+1)^d$ 条. 设给定输入变量 x_1, x_2, \dots, x_d 和前件模糊集 $\tilde{A}_{1p_1}, \tilde{A}_{2p_2}, \dots, \tilde{A}_{dp_d}$, 其对应的 Mamdani 模糊规则表示为

$R_{p_1 p_2 \dots p_d}$: IF x_1 是 \tilde{A}_{1p_1}, x_2 是 $\tilde{A}_{2p_2}, \dots, x_d$ 是 \tilde{A}_{dp_d} ,
THEN u 是 $\tilde{U}_{L(p_1, p_2, \dots, p_d)}$.

这里 u 是输出变量, $\tilde{U}_{L(p_1, p_2, \dots, p_d)}$ 表示后件输出模糊集. 按文献[8]广义 Mamdani 模糊系统表示为

$$M_m(x_1, x_2, \dots, x_d) =$$

$$\frac{\sum_{p_1, p_2, \dots, p_d = -m}^m (N_{p_1, p_2, \dots, p_d}(x_1, x_2, \dots, x_d))^\alpha \cdot S\left(\frac{\alpha P_1}{m}, \frac{\alpha P_2}{m}, \dots, \frac{\alpha P_d}{m}\right)}{\sum_{p_1, p_2, \dots, p_d = -m}^m (N_{p_1, p_2, \dots, p_d}(x_1, x_2, \dots, x_d))^\alpha}$$

其中 $(x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ 是系统的输入, d 为输入空间维数, 调节参数 $\alpha \in (0, +\infty)$.

定理 3 设 $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{R}, \hat{\mu})$ 是 K -拟可加测度空间, K 为给定诱导算子, $\forall p \in \mathbb{N}$. 若 $\forall S \in D_d, \forall \varepsilon > 0, \exists m_0 \in \mathbb{N}$, 使当 $m > m_0$ 时, 必有 $H_p(M_m, S) < \varepsilon$.

证明 设 $S \in D_d$ 的支撑为 $[-a, a]^d$, 而 $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{N_s}$ 是对应于 S 的剖分多面体, 且 $\bigcup_{j=1}^{N_s} \Delta_j = [-a, a]^d, \Delta_i \cap \Delta_j = \phi (i \neq j)$. 依据文献[20], 可将分片线性函数表为(式(2)为 $d=2$ 时特例):

$$S(x) = \begin{cases} \left| \frac{D_{j1}}{D_j} x_1 + \frac{D_{j2}}{D_j} x_2 + \dots + \frac{D_{jd}}{D_j} x_d + \frac{D_{j(d+1)}}{D_j} \right|, \\ \forall x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \Delta_{j_i}, j = 1, 2, \dots, p; i = 1, 2, \dots, s \\ 0, \quad \forall x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \Delta^c(a) \end{cases} \quad (2)$$

其中 $\bigcup_{i=1}^s \Delta_{j_i} = M_j$, 且 $\Delta_{j_i} \cap \Delta_{j_k} = \phi (i \neq k), j = 1, 2, \dots, p$, 所涉及记号参看文献[20], 不再赘述. 若 $\forall (p_1, p_2, \dots, p_d) \in G(m, x), \forall x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in [-a, a]^d$.

由文献[7,8], 根据每个小多面体 Δ_{j_i} 中得每个顶点坐标 $(\frac{ap_1}{m}, \frac{ap_2}{m}, \dots, \frac{ap_d}{m})$ 和动点 (x_1, x_2, \dots, x_d) 的关系, 若令

$$ap_i/m = \theta_{p_i}/m + x_i, i = 1, 2, \dots, d.$$

则必有 $|\theta_{p_i}| \leq ac_0$, 其中 c_0 为最大交互数.

$$\begin{aligned} & |K(M_m(x_1, \dots, x_d)) - K(S(x_1, \dots, x_d))| \\ & \leq K\left(\left| \frac{\sum_{p_1, \dots, p_d = -m}^m (N_{(p_1, \dots, p_d)}(x_1, \dots, x_d))^\alpha \cdot S\left(\frac{ap_1}{m}, \dots, \frac{ap_d}{m}\right)}{\sum_{p_1, p_2, \dots, p_d = -m}^m (N_{(p_1, p_2, \dots, p_d)}(x_1, \dots, x_d))^\alpha} - S(x_1, \dots, x_d) \right|\right) \\ & \leq K\left(\frac{\sum_{p_1, \dots, p_d = -m}^m (N_{(p_1, \dots, p_d)}(x_1, \dots, x_d))^\alpha |S\left(\frac{ap_1}{m}, \dots, \frac{ap_d}{m}\right) - S(x_1, \dots, x_d)|}{\sum_{p_1, p_2, \dots, p_d = -m}^m (N_{(p_1, p_2, \dots, p_d)}(x_1, x_2, \dots, x_d))^\alpha}\right) \leq K\left(\frac{ac_0}{m} \sum_{i=1}^d D_i(S)\right). \end{aligned}$$

此时, 依据式(1)中的 K_p -积分模的等价形式, $\forall p \in \mathbb{N}$, 明显有

$$\begin{aligned} & K(H_p^p(M_m, S)) = \int_{[-a, a]^d} |K(M_m(x_1, \dots, x_d)) - K(S(x_1, \dots, x_d))|^p d\mu \\ & \leq \int_{[-a, a]^d} \left[K\left(\frac{ac_0}{m} \sum_{i=1}^d D_i(S)\right) \right]^p d\mu \\ & = \left[K\left(\frac{ac_0}{m} \sum_{i=1}^d D_i(S)\right) \right]^p (2a)^d. \end{aligned}$$

此时, 将上述每个顶点坐标代入式(2), 显有

$$\begin{aligned} & \left| S\left(\frac{ap_1}{m}, \frac{ap_2}{m}, \dots, \frac{ap_d}{m}\right) - S(x_1, x_2, \dots, x_d) \right| \\ & = \left| \frac{D_{j1}}{D_j} \frac{ap_1}{m} + \frac{D_{j2}}{D_j} \frac{ap_2}{m} + \dots + \frac{D_{jd}}{D_j} \frac{ap_d}{m} + \frac{D_{j(d+1)}}{D_j} \right| - \\ & \left(\frac{D_{j1}}{D_j} x_1 + \frac{D_{j2}}{D_j} x_2 + \dots + \frac{D_{jd}}{D_j} x_d + \frac{D_{j(d+1)}}{D_j} \right) \Big| \\ & = \frac{1}{\|D_j\|} \left| |D_{j1}| \left(x_1 - \frac{ap_1}{m}\right) + |D_{j2}| \left(x_2 - \frac{ap_2}{m}\right) + \dots + |D_{jd}| \left(x_d - \frac{ap_d}{m}\right) \right|. \end{aligned}$$

这里符号 $|D_{j_i}|$ 表示矩阵 D_{j_i} 的行列式 ($i = 1, 2, \dots, d$), $\|D_j\|$ 表示行列式 $|D_j|$ 的绝对值, 称之为矩阵模.

依据上式约定, 每个动点 (x_1, x_2, \dots, x_d) 和顶点坐标 $(\frac{ap_1}{m}, \frac{ap_2}{m}, \dots, \frac{ap_d}{m})$ 的分量坐标之差总满足

$$\left| x_i - \frac{ap_i}{m} \right| = \frac{|\theta_{p_i}|}{m} \leq \frac{ac_0}{m}, i = 1, 2, \dots, d.$$

故有

$$\begin{aligned} & \left| S\left(\frac{ap_1}{m}, \frac{ap_2}{m}, \dots, \frac{ap_d}{m}\right) - S(x_1, x_2, \dots, x_d) \right| \\ & \leq \left(\frac{\|D_{j1}\|}{\|D_j\|} + \frac{\|D_{j2}\|}{\|D_j\|} + \dots + \frac{\|D_{jd}\|}{\|D_j\|} \right) \frac{ac_0}{m}. \\ & = \frac{ac_0}{m} \sum_{i=1}^d D_i(S) \end{aligned} \quad (3)$$

依据式(2), 显然, S 关于每个分量 x_i 的偏导数

$$D_i(S) = \left| \frac{\partial S}{\partial x_i} \right| = \frac{\|D_{j_i}\|}{\|D_j\|}, i = 1, 2, \dots, d.$$

再由命题 1 中式(1) $|K(a) - K(b)| \leq K(|a - b|)$ 和式(3), 代入文献[8]Mamdani 模糊系统, 则有

依诱导算子 K^{-1} 的递增性, 更有

$$H_p(M_m, S) \leq \left(K^{-1} \left((2a)^d \cdot \left[K\left(\frac{ac_0}{m} \sum_{i=1}^d D_i(S)\right) \right]^p \right) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

因此, $\forall \varepsilon > 0$, 若使

$$\begin{aligned} & \left(K^{-1} \left((2a)^d \cdot \left[K\left(\frac{ac_0}{m} \sum_{i=1}^d D_i(S)\right) \right]^p \right) \right)^{1/p} < \varepsilon \\ & \Leftrightarrow (2a)^d \cdot \left[K\left(\frac{ac_0}{m} \sum_{i=1}^d D_i(S)\right) \right]^p < K(\varepsilon^p). \end{aligned}$$

解之得 $m > \frac{ac_0 \sum_{i=1}^d D_i(S)}{K^{-1}(K(\epsilon)/(2a)^{d/p})}$, 进而选取剖分数

$$m_0 = \left\lceil \frac{ac_0 \sum_{i=1}^d D_i(S)}{K^{-1}(K(\epsilon)/(2a)^{d/p})} \right\rceil \in \mathbb{N}. \text{ 于是, 对任意给定 } p \in \mathbb{N}, \forall S \in D_d \text{ 及 } \forall \epsilon > 0, \exists m_0 \in \mathbb{N}, \text{ 使当 } m > m_0 \text{ 时, 必有 } H_p(M_m, S) < \epsilon.$$

定理 4 设 $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{R}, \hat{\mu})$ 是 K -拟可加测度空间, K 为给定一个诱导算子, $\forall p \in \mathbb{N}, \forall f \in L^+_p(\hat{\mu})$, 则 $\forall \epsilon > 0, \exists m_0 \in \mathbb{N}$, 当 $m > m_0$ 时, 有 $H_p(M_m, f) < \epsilon$, 亦即, 在 K_p -积分模意义下存在广义 Mamdani 模糊系统 M_m 可按任意精度逼近所给 $\hat{\mu}_p$ -可积函数 f .

证明 对任意给定 $p \in \mathbb{N}$ 及 $f \in L^+_p(\hat{\mu})$, 由定理 2, $\forall \epsilon > 0$, 存在 $a > 0$ 及分片线性函数 $S \in D_d$, 使得

$$H_p(S, f) = \left(\int_A^{(K)} |S(x) \ominus f(x)|^p d\hat{\mu} \right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon.$$

再由定理 3, 对该分片线性函数 S 来说, 必存在 $\exists m_0 \in \mathbb{N}$, 当 $\forall m > m_0$ 时(换言之, 存在广义 Mamdani 模糊系统 M_m), 也有

$$H_p(M_m, S) = \left(\int_A^{(K)} |M_m(x) \ominus S(x)|^p d\hat{\mu} \right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon.$$

进而依定理 1, 更有

$$H_p(M_m, f) \leq H_p(M_m, S) \oplus H_p(S, f) < \epsilon \oplus \epsilon = K^{-1}(2K(\epsilon)).$$

此时, $\forall \epsilon > 0$, 由 K^{-1} 和 K 的严增性知表达式 $K^{-1}(2K(\epsilon))$ 仍能任意小. 故该广义 Mamdani 模糊系统 M_m 可按任意精度逼近 $\hat{\mu}_p$ -可积函数 f .

注 2 定理 3 中找到的 m_0 是广义 Mamdani 模糊系统输入空间的剖分数, 它仅依赖于分片线性函数 S 而存在, 但由于分片线性函数 S 并不容易求得, 即使本文给出式(2)也只是局部的, 况且其结构比较繁琐, 故定理 3 给出的 m_0 的表达式中 $\sum_{i=1}^d D_i(S)$ 并不易求出, 因此, 我们继续探讨如何通过放大 $D_i(S)$ 来估算 m_0 值, 或设法求出尽可能小的 m_0 .

定理 5 设 $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{R}, \hat{\mu})$ 是 K -拟可加测度空间, K 为给定一个诱导算子, $\forall p \in \mathbb{N}, \forall f \in L^+_p(\hat{\mu})$, 则 $\forall \epsilon > 0$, 存在 $a > 0$ 和充分小的 $h > 0$, 若记

$$D_H(f) = \max_{1 \leq i \leq d, x_1, \dots, x_i+h, \dots, x_d \in [-a, a]} \sup_{x_1, \dots, x_i, \dots, x_d} \left| \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i+h, \dots, x_d) - f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_d)}{h} \right|,$$

必存在 $m_0 = \left\lceil \frac{ac_0 d D_H(f)}{K^{-1}(K(\epsilon)/(2a)^{d/p})} \right\rceil \in \mathbb{N}$, 使当 $m > m_0$ 时, 也有 $H_p(M_m, f) < \epsilon$.

证明 由定理 2, $\forall \epsilon > 0$, 存在 $a > 0$, 将 $[-a, a]^d$ 等距分割成若干个 d 维多面体 $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{N_s}$, 进而可

构造一个 $S \in D_d$, 使之满足 $H_p(f, S) < \epsilon$.

若设剖分后小多面体最大边长为 $h > 0$, 由文献[8]知 $D_H(f) = \max_{1 \leq i \leq d} D_i(S)$, 故 $D_i(S) \leq D_H(f), i = 1, 2, \dots, d$, 更有 $\sum_{i=1}^d D_i(S) \leq d D_H(f)$. 此时, 依据定理 3 及 K 和 K^{-1} 的严格递增性, 若使

$$H_p(M_m, S) = \left(K^{-1} \left((2a)^d \cdot \left[K \left(ac_0 \sum_{i=1}^d D_i(S) / m \right) \right]^p \right) \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(K^{-1} \left((2a)^d \cdot \left[K \left(ac_0 d D_H(f) / m \right) \right]^p \right) \right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon.$$

解之得 $m > \frac{ac_0 d D_H(f)}{K^{-1}(K(\epsilon)/(2a)^{d/p})}$, 选取剖分数

$$m_0 = \left\lceil \frac{ac_0 d D_H(f)}{K^{-1}(K(\epsilon)/(2a)^{d/p})} \right\rceil \in \mathbb{N}.$$

故 $\forall \epsilon > 0$, 必存在 $m_0 \in \mathbb{N}$, 且当 $m > m_0$ 时, 恒有

$$H_p(M_m, S) < \epsilon.$$

再依定理 4, 故有

$$H_p(M_m, f) \leq H_p(M_m, S) \oplus H_p(f, S) < \epsilon \oplus \epsilon = K^{-1}(2K(\epsilon)).$$

因此, 该广义 Mamdani 模糊系统 M_m 仍可按任意精度逼近所给 $\hat{\mu}_p$ -可积函数 f .

事实上, 通过定理 5 计算出的 m_0 才方便实用, 因该 m_0 是直接通过 $D_H(f)$ 估算得出, 这比应用定理 3 需借助分片线性函数来计算 m_0 简单得多! 当然, 有了依 m_0 确定的等距模糊剖分, 我们才能有效地构造前件模糊集, 进而获得广义 Mamdani 模糊系统.

5 模拟实例

本节, 我们将通过一个具体实例来说明基于 K -拟算术运算诱导的 K_p -积分模意义下广义 Mamdani 模糊系统的逼近与实现过程.

例 1 设诱导算子 $K(x) = \sqrt{x}$, 取 $a = 1$, 输入维数 $d = 2$, 最大交互数 $c_0 = 2$, 调节参数 $\alpha = 1$, 令

$$f(x, y) = \begin{cases} \exp(-x^2/3 - y^2/3), & y \geq 0 \\ -\exp(-x^2/3 + y^2/3), & y < 0 \end{cases}$$

容易验证 $f(x, y)$ 在 xoy 平面的 x 轴($y = 0$)上不连续, 但依定义 3 可验证 f 是 $\hat{\mu}_p$ -可积的! 不妨取剖分论域 $\Delta = [-1, 1] \times [-1, 1]$, 并且仅限 f 在 Δ 上讨论问题. 为此, 按定理 5 首先求 $D_i(f)$ 如下:

$$D_1(f) = \bigvee_{(x,y) \in \Delta} \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=\pm\sqrt{6}/2 \\ y=0}} \approx 0.5,$$

$$D_2(f) = \bigvee_{(x,y) \in \Delta} \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\substack{x=0 \\ y=\pm\sqrt{6}/2}} \approx 0.5.$$

故 $D_H(f) \leq D_1(f) \vee D_2(f) = 0.5$, 不妨取 $D_H(f) = 0.5$.

(1) $p = 2$ 时, 若误差 $\epsilon = 0.2 > 0$, 由 $K(x) = \sqrt{x}$, 则

$K^{-1}(x) = x^2$. 依定理 5 可计算出

$$m > \frac{ac_0 dD_H(f)}{K^{-1}(K(\epsilon)/(2a)^{d/p})} = \frac{1 \times 2 \times 2 \times 0.5}{(\sqrt{0.2}/2)^2} = 40.$$

不妨选取 $m = 41$, 按定理 5, 故必有 $\|M_m - f\| < \epsilon$. 现依 m 值在 x 轴定义 3 个三角模糊数 \tilde{A} 为

$$\tilde{A}(x) = \begin{cases} 1 - 41x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{41} \\ 1 + 41x, & -\frac{1}{41} \leq x < 0 \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

$$\tilde{A}_{1(41)}(x) = \begin{cases} 41x - 40, & \frac{40}{41} \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

$$\tilde{A}_{1(-41)}(x) = \begin{cases} -41x - 40, & -1 \leq x \leq -\frac{40}{41} \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

此时, 在 X 轴 $[-1, 1]$ 上将模糊集 \tilde{A} 逐次左右平移 $\frac{1}{41}$ 个长度单位, 亦即, 若令

$$\tilde{A}_{1j}(x) = \tilde{A}(x - \frac{j}{41}), j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 40,$$

则可获得一个等距模糊剖分 $\{\tilde{A}_{1j}\}$ (一族模糊集), 其中两端模糊集为 $\tilde{A}_{1(41)}$ 和 $\tilde{A}_{1(-41)}$.

同理, 若在 y 轴 $[-1, 1]$ 上令

$$\tilde{A}_{2j} = \tilde{A}_{1j}(j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 40),$$

也可获得一个等距模糊剖分 $\{\tilde{A}_{2j}\}$.

此外, 依据分片线性函数 S 的构造特点, $S(x, y)$ 与 $f(x, y)$ 在 Δ 的每个顶点 $(\frac{p_1}{41}, \frac{p_2}{41})$ 处函数值必相等, 亦即, $S(\frac{p_1}{41}, \frac{p_2}{41}) = f(\frac{p_1}{41}, \frac{p_2}{41})$. 故 $\forall (x, y) \in \Delta$, 其广义 Mamdani 模糊系统的输入输出解析表达式为

$$M_m(x, y) = \frac{\sum_{p_1, p_2 = -41}^{41} \tilde{A}_{1p_1}(x) \tilde{A}_{2p_2}(y) \cdot f(\frac{p_1}{41}, \frac{p_2}{41})}{\sum_{p_1, p_2 = -41}^{41} \tilde{A}_{1p_1}(x) \tilde{A}_{2p_2}(y)}.$$

(2) $p = 3$ 时, 仍取 $\epsilon = 0.2 > 0$, 依定理 5 可估算 $m > 1 \times 2 \times 2 \times 0.5 / (\sqrt{0.2}/2^{\frac{2}{3}})^2 \approx 25.6$. 不妨选取 $m = 26$. 此时, 必满足 $\|M_m - f\| < \epsilon$.

同理方法, 按上述方法可得 3 个模糊集分别为

$$\tilde{B}(x) = \begin{cases} 1 - 26x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{26} \\ 1 + 26x, & -\frac{1}{26} \leq x < 0 \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

$$\tilde{B}_{1(26)}(x) = \begin{cases} 26x - 25, & \frac{25}{26} \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

$$\tilde{B}_{1(-26)}(x) = \begin{cases} -26x - 25, & -1 \leq x \leq -\frac{25}{26} \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

若令 $\tilde{B}_{2j} = \tilde{B}_{1j}(j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 26)$, 并依顶点

满足 $S(\frac{p_1}{26}, \frac{p_2}{26}) = f(\frac{p_1}{26}, \frac{p_2}{26})$ 可构造广义 Mamdani 模糊系统的输入输出解析表达式为

$$M_m(x, y) = \frac{\sum_{p_1, p_2 = -26}^{26} \tilde{B}_{1p_1}(x) \tilde{B}_{2p_2}(y) f(\frac{p_1}{26}, \frac{p_2}{26})}{\sum_{p_1, p_2 = -26}^{26} \tilde{B}_{1p_1}(x) \tilde{B}_{2p_2}(y)}.$$

应用 MATLAB 软件, 在 Δ 内可得 f 的曲面、分片线性函数和广义 Mamdani 模糊系统曲面图如下:

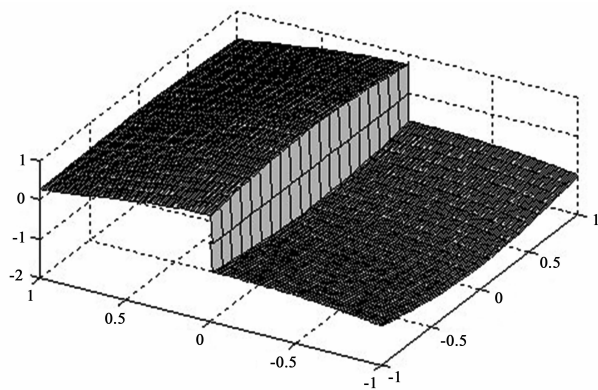


图1 $\hat{\mu}_p$ -可积函数 f 的曲面图

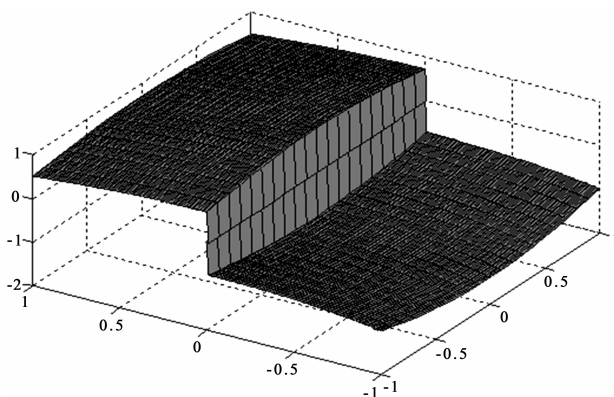


图2 f 对应的某个分片线性函数空间图

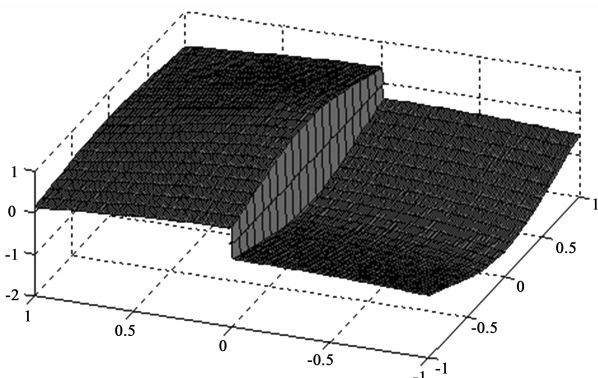


图3 $P=2$ 时 $M_m(x, y)$ 的曲面图

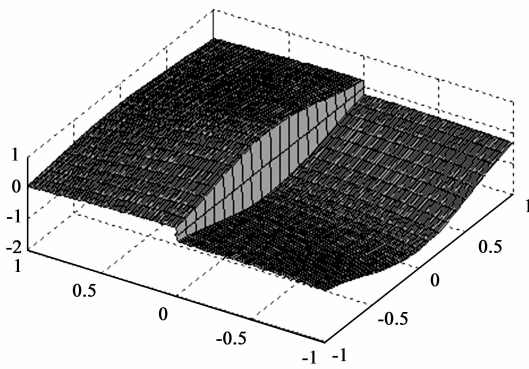


图4 $p=3$ 时 $M_m(x, y)$ 的曲面图

从上述4幅图片来看它们都比较接近,主要区别是图1所给 $\hat{\mu}_p$ -可积函数 f 在 $y=0$ 处出现断面,而图2~图4在此处却是衔接的,这是因图1在 $y=0$ 处不连续,而图2~图4在此处连续的缘故.另外,当参数 $p=2,3$ 时,从图3~图4可知该广义Mamdani模糊系统的空间曲面图区别并不大,但对相同精度 $\epsilon=0.2$ 来说, $p=2$ 时剖分数 $m=41$; $p=3$ 时 $m=26$.因此,随参数 p 增大剖分数将逐步减少,这说明广义Mamdani模糊系统随着参数 p 增大其逼近效果越来越好.

6 结论

一般情况下,模糊系统对可积函数类或连续函数类的逼近性可通过分片线性函数来实现,而改变被逼近函数性态或度量工具将会引起模糊系统的逼近效果发生变化.本文在文献[17,19]基础上拓展了 K -拟算术运算,进而依赖 K_p -积分模为度量系统研究了广义Mamdani模糊系统对给定一类 $\hat{\mu}_p$ -可积函数的逼近性.结果表明,在 K_p -积分模意义下广义Mamdani模糊系统对连续函数类的逼近能力可推广到一类可积函数.但进一步值得思考的问题是,随着系统输入空间维数递增和模糊推理规则总数的迅速增加,系统内部容易出现“维数灾难”或“计算机溢出”现象.因此,如何设计及构造合适的模糊系统来避免上述缺陷尤为重要,这是下一步将要继续探讨的问题之一.

参考文献

- [1] Takagi T, Sugeno M. Fuzzy identification of system and its applications to modeling and control [J]. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybern, 1985, 15(1): 116 - 132.
- [2] Kosko B. Fuzzy systems are universal approximators [J]. IEEE Transactions on Computers, 1994, 43(11): 1329 - 1333.
- [3] Buckley J J. Sugeno type controllers are universal controllers [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1993, 53(3): 299 - 303.
- [4] Wang L X, Mendel J. Fuzzy basis functions, universal approxi-

mation and orthogonal least-squares learning [J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 1992, 3(5): 807 - 814.

- [5] Wang L X. Universal approximation by hierarchical fuzzy systems [J]. Fuzzy Set and Systems, 1998, 93(1): 223 - 230.
- [6] Wang L X. Analysis and design of hierarchical fuzzy systems [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 1999, 7(5): 617 - 624.
- [7] 刘普寅, 李洪兴. 广义模糊系统对于可积函数的逼近性 [J]. 中国科学(E辑), 2000, 30(5): 413 - 423.
Liu Pu-yin, Li Hong-xing. Approximation of generalized fuzzy systems to integrable functions [J]. Science in China, Series E, 2000, 30(5): 413 - 423. (in Chinese)
- [8] Liu Pu-yin, Li Hong-xing. Analyses for $L_p(\mu)$ -norm approximation capability of the generalized Mamdani fuzzy systems [J]. Information Sciences, 2001, 138(2): 195 - 210.
- [9] 曾珂, 张乃尧, 徐文立. 线性 T-S 模糊系统作为通用逼近器的充分条件 [J]. 自动化学报, 2001, 27(5): 606 - 612.
Zeng Ke, Zhang Nai-yao, Xu Wen-li. Sufficient condition for linear T-S fuzzy systems universal approximators [J]. Acta Automatica Sinica, 2001, 27(5): 606 - 612. (in Chinese)
- [10] 孙富春, 杨晋, 刘华平. SISO Mamdani 模糊系统作为函数逼近器的必要条件 [J]. 智能系统学报, 2009, 4(4): 288 - 294.
Sun Fu-chun, Yang Jin, Liu Hua-ping. Preconditions for SISO Mamdani fuzzy systems to perform as function approximators [J]. Transactions on Intelligent Systems, 2009, 4(4): 288 - 294. (in Chinese)
- [11] 曾珂, 徐文立, 张乃尧. 特定 Mamdani 模糊系统的通用逼近性 [J]. 控制与决策, 2000, 15(4): 435 - 438.
Zeng Ke, Xu Wen-li, Zhang Nai-yao. Universal approximation of special Mamdani fuzzy systems [J]. Control and Decision, 2000, 15(4): 435 - 438. (in Chinese)
- [12] 张宇卓, 李洪兴. 广义递阶 Mamdani 模糊系统及其泛逼近性 [J]. 控制理论与应用, 2006, 23(3): 449 - 454.
Zhang Yu-zhuo, Li Hong-xing. Generalized hierarchical Mamdani fuzzy systems and their universal approximation [J]. Control Theory and Application, 2006, 23(3): 449 - 454. (in Chinese)
- [13] 袁学海, 李洪兴, 孙凯彪. 基于参数单点模糊化方法的模糊系统及逼近能力 [J]. 电子学报, 2011, 39(10): 2372 - 2377.
Yuan Xue-hai, Li Hong-xing, Sun Kai-biao. Fuzzy systems and their approximation capability based on parameter singleton fuzzifier methods [J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 39(10): 2372 - 2377. (in Chinese)
- [14] 袁学海, 李洪兴, 杨雪. 基于模糊变换的模糊系统和模糊推理建模法 [J]. 电子学报, 2013, 41(4): 674 - 680.
Yuan Xue-hai, Li Hong-xing, Yang Xue. Fuzzy system and fuzzy inference modeling method based on fuzzy transforma-

- tion[J]. Acta Electronica Sinica, 2013, 41(4): 674 – 680. (in Chinese)
- [15] 李洪兴, 袁学海, 王加银. Fuzzy 系统的范数与 Fuzzy 系统的分类[J]. 中国科学(信息科学), 2010, 40(12): 1596 – 1610.
Li Hong-xing, Yuan Xue-hai, Wang Jia-yin. The normal numbers of the fuzzy systems and their classes[J]. Science China Information Science, 2010, 40(12): 1596 – 1610. (in Chinese)
- [16] 孟艳萍, 谭艳华, 李洪兴. 自适应 Fuzzy 系统及其逼近性能分析[J]. 数学进展, 2012, 41(4): 423 – 435.
Meng Yan-ping, Tan Yan-hua, Li Hong-xing. Adaptive fuzzy systems and the analysis of approximation[J]. Advances in Mathematics, 2012, 41(4): 423 – 435. (in Chinese)
- [17] 王贵君, 李晓萍. K-积分模意义下折线模糊神经网络的泛逼近性[J]. 中国科学(信息科学), 2012, 42(3): 362 – 378.
Wang Gui-jun, Li Xiao-ping. Universal approximation of polygonal fuzzy neural networks in sense of K-integral norms[J]. Science China Information Science, 2011, 54(11): 2307 – 2323. (in Chinese)
- [18] 王贵君, 段晨霞. 广义分层混合模糊系统及其泛逼近性[J]. 控制理论与应用, 2012, 29(5): 673 – 680.
Wang Gui-jun, Duan Chen-xia. Generalized hierarchical hybrid fuzzy system and its universal approximation[J]. Control Theory and Application, 2012, 29(5): 673 – 680. (in Chinese)
- [19] 王贵君, 李晓萍, 隋晓琳. 广义 Mamdani 模糊系统依 K-积分模的泛逼近及其实现过程[J]. 自动化学报, 2014, 40(1): 143 – 148.
Wang Gui-jun, Li Xiao-ping, Sui Xiao-lin. Universal approximation and its realize process of generalized Mamdani fuzzy system in K-integral norms[J]. Acta Automatica Sinica, 2014, 40(1): 143 – 148. (in Chinese)
- [20] 彭维玲. 基于剖分模糊系统输入空间的多维分片线性函数的构造及逼近[J]. 系统科学与数学, 2014, 34(3): 340 – 351.
Peng Wei-ling. Structure and approximation of a multidimensional piecewise linear function based on the input space of subdivision fuzzy systems[J]. System Science and Mathematical Sciences, 2014, 34(3): 340 – 351. (in Chinese)
- [21] Sugeno M, Murofushi T. Pseudo-additive measures and integrals[J]. Math Anal Appl, 1987, 122: 197 – 222.
- [22] 王贵君, 李晓萍. K-拟可加模糊数值积分的伪自连续及结构特征[J]. 应用数学学报, 2010, 33(1): 66 – 77.
Wang Gui-jun, Li Xiao-ping. The pseudo-autocontinuity and structural characteristics of K-quasi-additive fuzzy number valued integrals[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2010, 33(1): 66 – 77. (in Chinese)

作者简介



陶玉杰 女, 1975 年 8 月出生, 副教授, 吉林通化人. 2004 年获燕山大学理学硕士学位, 现在通化师范学院数学学院任教. 主要研究方向: 模糊系统分析.
E-mail: taotujie@126.com



王宏志 男, 1975 年 6 月出生, 副教授, 吉林梅河口人. 2006 年获吉林大学数学所理学硕士学位, 现在通化师范学院数学学院任教. 主要研究方向: 模糊系统逼近分析.
E-mail: whz-98@126.com



王贵君(通信作者) 男, 1962 年 7 月出生, 教授, 吉林集安人. 1987 年毕业于东北师范大学数学系, 1994 年获该校理学硕士学位. 现任中国模糊系统与模糊数学学会常务理事, 天津市数学会理事, 天津市工业与应用数学学会理事. 研究方向: 模糊神经网络、模糊系统分析、模糊测度与模糊积分.
E-mail: tjwgj@126.com